Hong Kong Mathematics Olympiad (2003 – 2004)

Final Event 1 (Individual)

香港數學競賽 (2003 – 2004)

決賽項目 1 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 已知有 a 個少於 200 的正整數，它們每個都只有三個正因數，求 a 的值。

   Given that there are a positive integers less than 200 and each of them has exactly three positive factors, find the value of a.

2. 若 a 個斜邊是 $\sqrt{2}$ cm 的等腰直角三角形能拼成一個周界是 b cm 的梯形，求 b 的最小可能的值。(答案用根號表示)

   If a copies of a right-angled isosceles triangle with hypotenuse $\sqrt{2}$ cm can be assembled to form a trapezium with perimeter equal to b cm, find the least possible value of b. (give the answer in surd form)

3. 若 $\sin(c^2 - 3c + 17)^\circ = \dfrac{4}{b-2}$，其中 $0 < c^2 - 3c + 17 < 90$ 及 $c > 0$，求 c 的值。

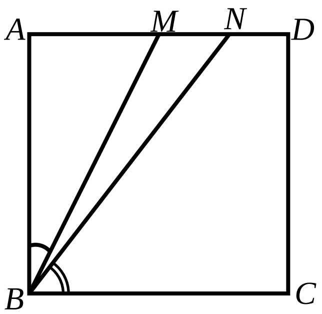
   If $\sin(c^2 - 3c + 17)^\circ = \dfrac{4}{b-2}$, where $0 < c^2 - 3c + 17 < 90$ and $c > 0$, find the value of c.

4. 已知兩個三位數 $\overline{xyz}$ 和 $\overline{zyx}$ 的差等於 $700 - c$，其中 $x > z$。若 d 是 $x + z$ 的最大值，求 d 的值。

   Given that the difference between two 3-digit numbers $\overline{xyz}$ and $\overline{zyx}$ is $700 - c$, where $x > z$. If d is the greatest value of $x + z$, find the value of d.

Hong Kong Mathematics Olympiad (2003 – 2004)
Final Event 2 (Individual)
香港數學競賽 (2003 – 2004)
決賽項目 2 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 

圖一
Figure 1

如圖一，$ABCD$ 為一正方形，M 是 AD 的中點及 N 是 MD 的中點。若 $\angle CBN : \angle MBA = P : 1$，求 P 的值。

In Figure 1 , $ABCD$ is a square , M is the mid-point of AD and N is the mid-point of MD . If $\angle CBN : \angle MBA = P : 1$, find the value of P .

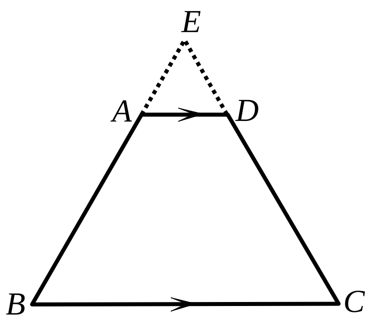
2. 已知 $ABCD$ 為一坐標平面上的菱形，其頂點的座標分別為 $A(0, 0)$ ，$B(P, 1)$ ，$C(u, v)$ 及 $D(1, P)$。若 $u + v = Q$，求 Q 的值。

Given that $ABCD$ is a rhombus on a Cartesian plane, and the co-ordinates of its vertices are $A(0, 0)$, $B(P, 1)$, $C(u, v)$ and $D(1, P)$ respectively. If $u + v = Q$, find the value of Q .

3. 若 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+Q)=R$，求 R 的值。

If $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+Q)=R$, find the value of R .

4.



圖二

Figure 2

如圖二，EBC 是一等邊三角形，A 和 D 分別在 EB 和 EC 上。已知 $AD // BC$，$AB = CD = R$，且 $AC \perp BD$。若梯形 $ABCD$ 的面積是 S，求 S 的值。

In Figure 2, EBC is an equilateral triangle, and A, D lie on EB and EC respectively. Given that $AD // BC$, $AB = CD = R$ and $AC \perp BD$. If the area of the trapezium $ABCD$ is S, find the value of S.

Hong Kong Mathematics Olympiad (2003 – 2004)
Final Event 3 (Individual)
香港數學競賽 (2003 – 2004)
決賽項目 3 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 設 $x \neq \pm 1$ 及 $x \neq -3$。若 a 是方程 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}=\frac{2}{x^2-1}$，求 a 的值。

   Let $x \neq \pm 1$ and $x \neq -3$. If a is the real root of the equation $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}=\frac{2}{x^2-1}$, find the value of a.

2. 設 $b>1$，$f(b)=\frac{-a}{\log_2 b}$ 及 $g(b)=1+\frac{1}{\log_3 b}$。若 b 滿足方程 $\left|f(b)-g(b)\right|+f(b)+g(x)=3$，求 b 的值。

   Let $b>1$, $f(b)=\frac{-a}{\log_2 b}$ and $g(b)=1+\frac{1}{\log_3 b}$. If b satisfies the equation $\left|f(b)-g(b)\right|+f(b)+g(x)=3$, find the value of b.

3. 已知實數 x_0 滿足方程 $x^2-5x+(b-8)=0$。若 $c=\frac{x_0^{\ 2}}{x_0^{\ 4}+x_0^{\ 2}+1}$，求 c 的值。

   Given that x_0 satisfies the equation $x^2-5x+(b-8)=0$. If $c=\frac{x_0^{\ 2}}{x_0^{\ 4}+x_0^{\ 2}+1}$, find the value of c.

4. 若 -2 和 $216c$ 是方程 $px^2+dx=1$ 的根，求 d 的值。

   If -2 and $216c$ are the roots of the equation $px^2+dx=1$, find the value of d.

Hong Kong Mathematics Olympiad (2003 – 2004)

Final Event 4 (Individual)

香港數學競賽 (2003 – 2004)

決賽項目 4 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

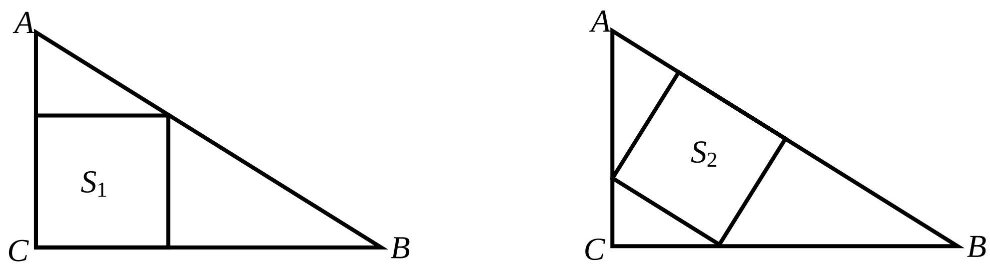
1. 設 a 為實數。若 a 滿足方程 $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$，求 a 的值。

Let a be a real number. If a satisfies the equation $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$, find the value of a.

2. 已知 n 是自然數。若 $b=n^3-4an^2-12n+144$ 是質數，求 b 的值。

Given that n is a natural number. If $b=n^3-4an^2-12n+144$ is a prime number, find the value of b.

3.



圖一

Figure 1

如圖一，S_1 和 S_2 都是直角三角形 ABC 的兩個不同的內接正方形。若 S_1 的面積是 $40b+1$，S_2 的面積是 $40b$，及 $AC+CB=c$，求 c 的值。

In Figure 1, S_1 and S_2 are two different inscribed squares of the right-angled triangle ABC. If the area of S_1 is $40b+1$, the area of S_2 is $40b$ and $AC+CB=c$, find the value of c.

4. 已知 $241c+241=d^2$，求 d 的值。

Given that $241c+241=d^2$, find the value of d.